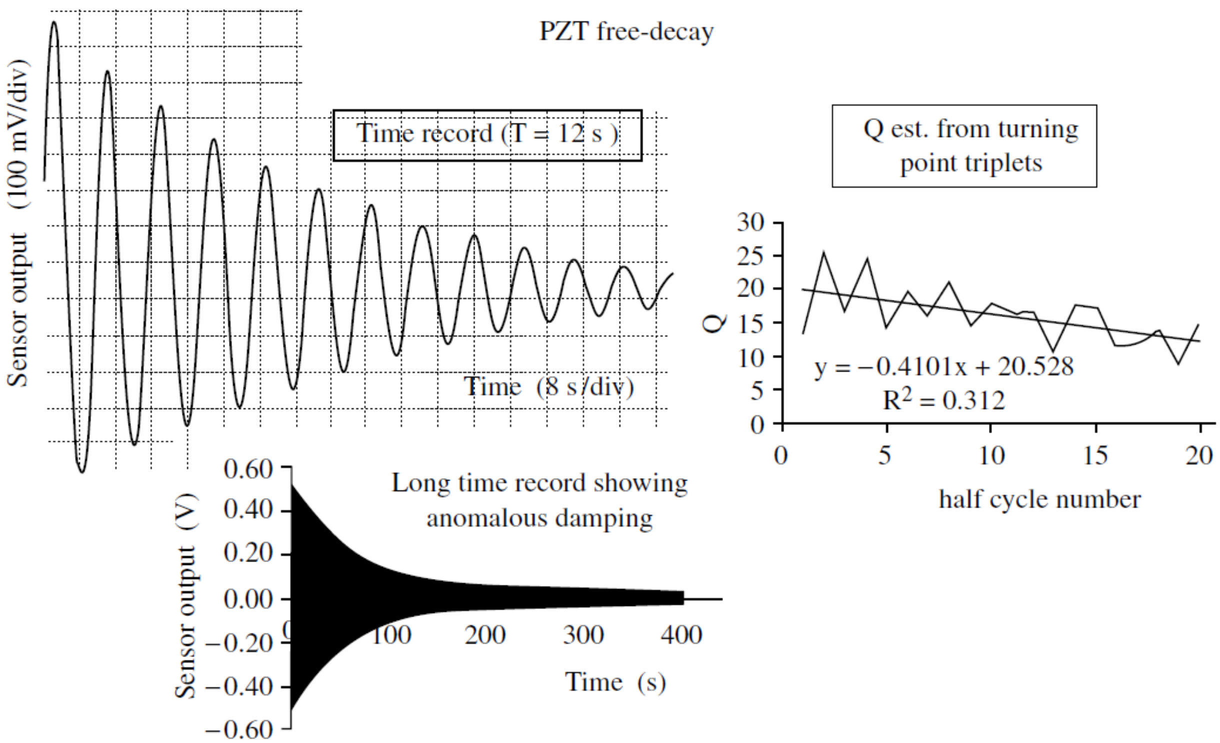
COMPENDIO DE PROBLEMAS RESUELTOS DE SISTEMAS DE VIBRACIONES LIBRES



Vibraciones Mecánicas 1
Prof. Charles Delgado

Una viga de acero puesta en voladizo tiene una longitud de 10 pulgadas y una sección trasversal cuadrada de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ pul. Una masa de 10 lb se ata al extremo libre de la viga, como se muestra en la figura 1-11. Determine la frecuencia natural del sistema, si la masa se desplaza ligeramente y luego se deja en libertad.

Fig. 1-11

Suponer que la masa de la viga es pequeña. De la resistencia de materiales, la deflexión en el extremo libre de la viga en voladizo debida a la masa m es $\delta = PL^3/3EI$.

Para oscilaciones pequeñas la viga se comporta elásticamente; la constante elástica es $k = F/\delta = 3EI/L^3$ lb/pul.

El momento de inercia de la viga es $I = b^3h/12 = (\frac{1}{4})^3(\frac{1}{4})/12 = 1/3072$ pul^4, y el módulo de elasticidad del acero es $E = 30(10)^6$ lb/pul^2.

La ecuación de movimiento para la vibración libre sin amortiguamiento es $m\ddot{x} + kx = 0$, y

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{3(30)(10)^6(32,2)(12)}{10(3072)(10)^3}} = 33,7 \text{ rad/seg}$$

Una viga simplemente apoyada con una carga concentrada que actúa en su punto medio, se muestra en la figura 1-9. Si la masa de la viga es despreciable comparada con la masa que actúa, encuentre la frecuencia natural del sistema.

De la resistencia de materiales, la deflexión en el punto medio de una viga simplemente apoyada, debida a la carga concentrada P en el centro de la viga, está dada por $\delta = PL^3/48EI$, donde E e I tienen los significados usuales. Para deflexiones pequeñas, $k = P/\delta = 48EI/L^3$; por tanto, la ecuación de movimiento para esta vibración libre sin amortiguamiento es:

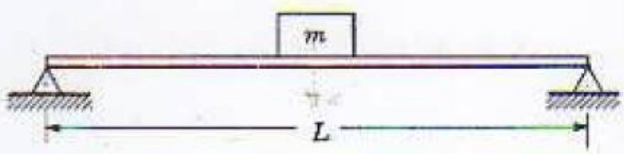


Fig. 1-9

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

y $\qquad \omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{48EI/mL^3}$ rad/seg

1. Escribir la ecuación diferencial de las vibraciones libres del sistema que muestra la figura 7-4, en que x se mide a partir de la posición en el que el resorte está sin esfuerzo.

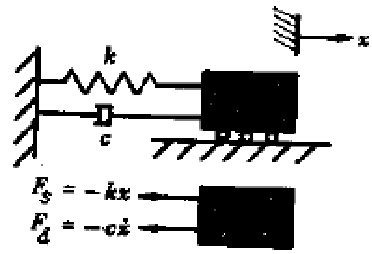


Fig. 7-4

Solución:

Se hace el diagrama de cuerpo libre de la masa y se señalan cuidadosamente todas las fuerzas que actúan en la dirección x. Se aplica la segunda ley de Newton, igualando la suma de las fuerzas externas al producto de la masa por la aceleración.

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \qquad \text{o} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Notar que la fuerza del resorte se ha escrito apropiadamente como $-kx$, ya que su sentido es opuesto al de x. En forma similar, la fuerza de amortiguamiento se ha escrito como $-c\dot{x}$, ya que su sentido es opuesto al de la velocidad $\dot{x}$.

2. Escribir la ecuación diferencial de las vibraciones libres del sistema mostrado en la figura 7-5. Despreciar la masa de la varilla.

Solución:

Existe un movimiento angular. Se sumarán los momentos de las fuerzas externas alrededor de la articulación O y se igualarán al producto de la aceleración angular por el momento de inercia relativo a la articulación.

Para un pequeño desplazamiento θ, la fuerza del resorte es muy cercana a $-ka\,\theta$ y la fuerza del amortiguador a $-ca\,\dot{\theta}$. Además, los brazos de momento para estas fuerzas son muy próximos a a. El brazo de momento para la fuerza debida al peso es b sen θ, el cual se aproximará a $b\,\theta$. El momento de inercia de la masa relativo a la articulación es mb^2 ; por tanto,

$$-(ca\dot{\theta})a - (ka\theta)a - mg(b\theta) = mb^2\ddot{\theta}$$

o

$$mb^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (ka^2 + mbg)\theta = 0$$

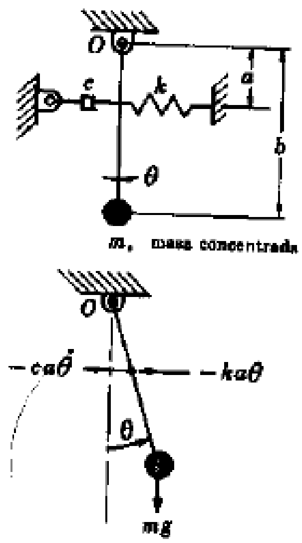


Fig. 7-5

3. Determinar para el sistema del problema 2 (a) la frecuencia natural, (b) la frecuencia amortiguada, (c) el valor crítico del factor de amortiguamiento c.

Solución:

Comparando la ecuación escrita en el problema 2 con la ecuación general para un grado de libertad que se discutió anteriormente, tenemos

$$x = \theta,\quad \dot{x} = \dot{\theta},\quad \ddot{x} = \ddot{\theta},\quad m_e = mb^2,\quad c_e = ca^2,\quad k_e = ka^2 + mgb$$

Por tanto

$$(a)\ \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgb}{mb^2}} \qquad (b)\ \omega_d = \sqrt{\frac{k_e}{m_e} - \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgb}{mb^2} - \left(\frac{ca^2}{2mb^2}\right)^2}$$

$$(c)\ (c_e)_c = c_c a^2 = 2\sqrt{k_e m_e} = 2\sqrt{(ka^2 + mgb)mb^2} \qquad \text{o} \qquad c_c = (2/a^2)\sqrt{(ka^2 + mgb)mb^2}$$

9. Escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento de los sistemas que se muestran en las figuras 7-14, 7-15 y 7-16. En todos los casos el desplazamiento x se mide desde la posición de equilibrio estático.

Resp. Fig. 7-14: $m\ddot{x} + c\dot{x} + (\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2})x = F(t)$

Fig. 7-15: $m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F(t)$

Fig. 7-16: $m\ddot{x} + c\dot{x} + (\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2})x = F_o \text{ sen } \omega t$

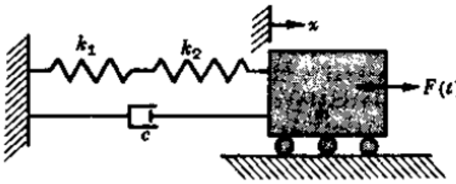


Fig. 7-14

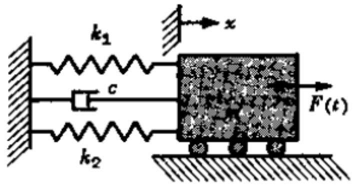


Fig. 7-15

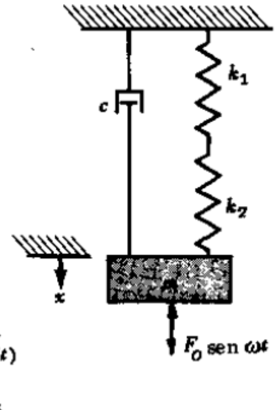


Fig. 7-16

36. Se observa que la amplitud de vibración del sistema, mostrado en la figura 1-40, decrece hasta un 25% del valor inicial, después de cinco ciclos consecutivos de movimiento, como se muestra en la figura 1-41. Determine el coeficiente de amortiguamiento c del sistema si $k = 20$ lb/pul y $m = 10$ lb.

Como se discutió en el problema 28, para una vibración libre amortiguada,

$$x_t = Ce^{-\zeta\omega_n t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi)$$

La máxima amplitud en un ciclo ocurre cuando sen$(\omega_d t + \phi)$ es igual a la unidad. Por esto, las máximas amplitudes son

$$x_1 = Ce^{-\zeta\omega_n t_1} \qquad \text{y} \qquad x_2 = Ce^{-\zeta\omega_n t_2}$$

La razón

$$x_1/x_2 = e^{\zeta\omega_n(t_2 - t_1)} = e^{\zeta\omega_n(2\pi/\omega_d)} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

debido a que $(t_2 - t_1)$, la diferencia de tiempo entre dos amplitudes consecutivas es también el período de oscilación y $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$. El logaritmo de esta razón, x_1/x_2, es $\ln(x_1/x_2) = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} = \delta$, donde δ es llamada el *decrecimiento logarítmico*. Puesto que el coeficiente de amortiguamiento $c = 2\zeta\sqrt{km}$, conociendo la razón de dos amplitudes consecutivas o el decrecimiento logarítmico δ, se conoce el factor de amortiguamiento ζ y en consecuencia también se conoce c.

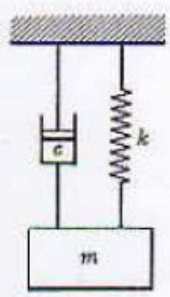


Fig. 1-40

En este problema, $x_1/x_6 = 1/0{,}25$. Pero $x_1/x_6 = (x_1/x_2)(x_2/x_3)(x_3/x_4)(x_4/x_5)(x_5/x_6)$, y $\ln(x_1/x_2) = \delta$. Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\ln 4 = \ln(x_1/x_2) + \ln(x_2/x_3) + \ln(x_3/x_4) + \ln(x_4/x_5) + \ln(x_5/x_6)$$

o $\ln 4 = 5\delta$, $\delta = 0{,}28$.

De $\delta = 0{,}28 = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$, obtenemos $\zeta = 0{,}044$. Entonces,

$$c = 2\zeta\sqrt{km} = 2(0{,}044)\sqrt{(20/12)(10/32{,}2)} = 0{,}063 \text{ lb-seg/pul}$$

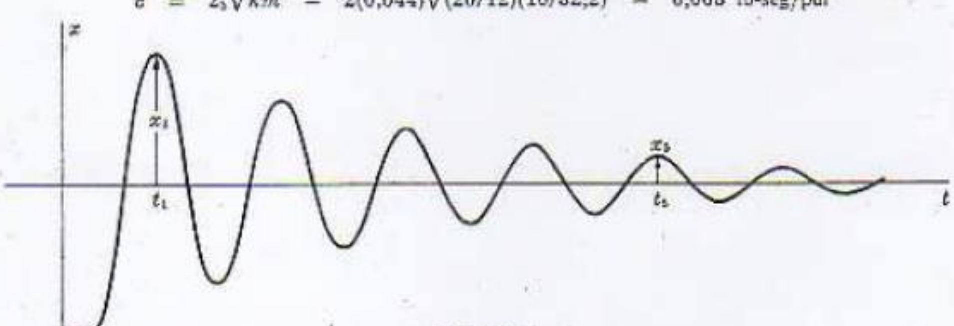


Fig. 1-41

22-1. When a 20-lb weight is suspended from a spring, the spring is stretched a distance of 4 in. Determine the natural frequency and the period of vibration for a 10-lb weight attached to the same spring.

$$k = \frac{20}{\frac{4}{12}} = 60 \text{ lb/ft}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60}{\frac{10}{32.2}}} = 13.90 \text{ rad/s}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.452 \text{ s} \qquad \textbf{Ans}$$

$$f = \frac{1}{\tau} = 2.21 \text{ Hz} \qquad \textbf{Ans}$$

22-2. A spring has a stiffness of 600 N/m. If a 4-kg block is attached to the spring, pushed 50 mm above its equilibrium position, and released from rest, determine the equation which describes the block's motion. Assume that positive displacement is measured downward.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{600}{4}} = 12.25 \text{ rad/s}$$

$$v = 0, \quad x = -0.05 \text{ m at } t = 0$$

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$$-0.05 = 0 + B$$

$$B = -0.05$$

$$v = A\omega_n \cos \omega_n t - Bp \sin \omega_n t$$

$$0 = A(12.25) - 0$$

$$A = 0$$

Thus, $x = -0.05 \cos(12.2t)$ m **Ans**

22-3. When a 3-kg block is suspended from a spring, the spring is stretched a distance of 60 mm. Determine the natural frequency and the period of vibration for a 0.2-kg block attached to the same spring.

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{3(9.81)}{0.060} = 490.5 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{490.5}{0.2}} = 49.52 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{49.52}{2\pi} = 7.88 \text{ Hz} \qquad \textbf{Ans}$$

$$\tau = \frac{1}{f} = \frac{1}{7.88} = 0.127 \text{ s} \qquad \textbf{Ans}$$

***22-4.** An 8-kg block is suspended from a spring having a stiffness $k = 80$ N/m. If the block is given an upward velocity of 0.4 m/s when it is 90 mm above its equilibrium position, determine the equation which describes the motion and the maximum upward displacement of the block measured from the equilibrium position. Assume that positive displacement is measured downward.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{80}{8}} = 3.162 \text{ rad/s}$$

$$v = -0.4 \text{ m/s}, \quad x = -0.09 \text{ m at } t = 0$$

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$$-0.09 = 0 + B$$

$$B = -0.09$$

$$v = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t$$

$$-0.4 = A(3.162) - 0$$

$$A = -0.126$$

Thus, $x = -0.126 \sin(3.16t) - 0.09 \cos(3.16t)$ m **Ans**

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-0.126)^2 + (-0.09)^2} = 0.155 \text{ m} \qquad \textbf{Ans}$$

22-5. A 2-lb weight is suspended from a spring having a stiffness $k = 2$ lb/in. If the weight is pushed 1 in. upward from its equilibrium position and then released from rest, determine the equation which describes the motion. What is the amplitude and the natural frequency of the vibration?

$k = 2(12) = 24$ lb/ft

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{24}{\frac{2}{32.2}}} = 19.66 \text{ rad/s}$$

$f = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = 3.13$ Hz **Ans**

$y = -\dfrac{1}{12}, \quad v = 0$ at $t = 0$

From Eqs. 22-3 and 22-4.

$$-\frac{1}{12} = 0 + B$$

$B = -0.0833$

$0 = A\omega_n + 0$

$A = 0$

$C = \sqrt{A^2 + B^2} = 0.0833$ ft $= 1$ in. **Ans**

Position equation,

$y = (0.0833 \cos 19.7t)$ ft **Ans**

22-6. A 6-lb weight is suspended from a spring having a stiffness $k = 3$ lb/in. If the weight is given an upward velocity of 20 ft/s when it is 2 in. above its equilibrium position, determine the equation which describes the motion and the maximum upward displacement of the weight, measured from the equilibrium position. Assume positive displacement is downward.

$k = 3(12) = 36$ lb/ft

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36}{\frac{6}{32.2}}} = 13.90 \text{ rad/s}$$

$t = 0, \quad v = -20$ ft/s, $\quad y = -\dfrac{1}{6}$ ft

From Eq. 22-3,

$$-\frac{1}{6} = 0 + B$$

$B = -0.167$

From Eq. 22-4,

$-20 = A(13.90) + 0$

$A = -1.44$

Thus,

$y = [-1.44 \sin(13.9t) - 0.167 \cos(13.9t)]$ ft **Ans**

From Eq. 22-10,

$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(1.44)^2 + (-0.167)^2} = 1.45$ ft **Ans**

22-7. A 6-kg block is suspended from a spring having stiffness of $k = 200$ N/m. If the block is given an upward velocity of 0.4 m/s when it is 75 mm above its equilibrium position, determine the equation which describes the motion and the maximum upward displacement of the block measured from the equilibrium position. Assume that positive displacement is downward.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{6}} = 5.774$$

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$x = -0.075$ m when $t = 0$,

$$-0.075 = 0 + B; \quad B = -0.075$$

$$v = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t$$

$v = -0.4$ m/s when $t = 0$.

$$-0.4 = A(5.774) - 0; \quad A = -0.0693$$

Thus,

$$x = -0.0693 \sin(5.77t) - 0.075 \cos(5.77t) \qquad \textbf{Ans}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-0.0693)^2 + (-0.075)^2} = 0.102 \text{ m} \qquad \textbf{Ans}$$

***22-8.** A 3-kg block is suspended from a spring having a stiffness of $k = 200$ N/m. If the block is pushed 50 mm upward from its equilibrium position and then released from rest, determine the equation that describes the motion. What are the amplitude and the natural frequency of the vibration? Assume that positive displacement is downward.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{3}} = 8.165$$

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{8.165}{2\pi} = 1.299 = 1.30 \text{ Hz} \qquad \textbf{Ans}$$

$$x = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t$$

$x = -0.05$ m when $t = 0$,

$$-0.05 = 0 + B; \quad B = -0.05$$

$$v = A\omega_n \cos \omega_n t - B\omega_n \sin \omega_n t$$

$v = 0$ when $t = 0$,

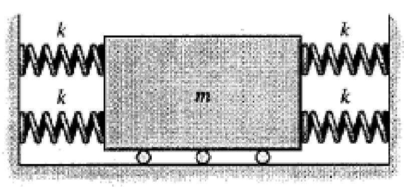
$$0 = A(8.165) - 0; \quad A = 0$$

Hence,

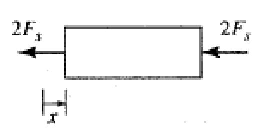
$$x = -0.05 \cos(8.16t) \qquad \textbf{Ans}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(0)^2 + (-0.05)^2} = 0.05 \text{ m} = 50 \text{ mm} \qquad \textbf{Ans}$$

22-9. Determine the frequency of vibration for the block. The springs are originally compressed Δ.



$$\xrightarrow{+} \sum F_x = ma_x: \quad -4kx = m\ddot{x}$$

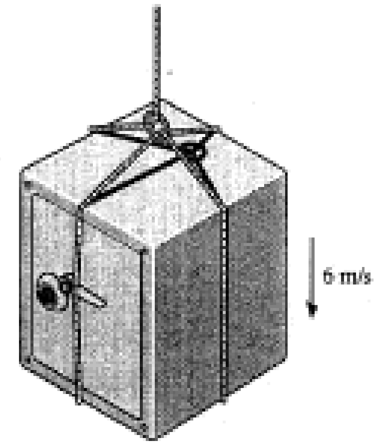


$$\ddot{x} + \frac{4k}{m}x = 0$$

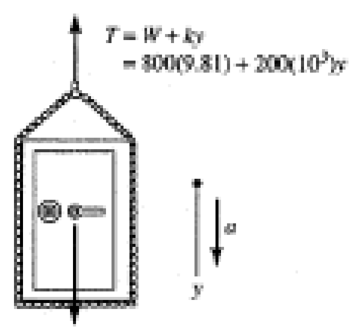
$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \textbf{Ans}$$

22-11. A cable is used to suspend the 800-lb safe. If the safe is being lowered at 6 m/s when the motor controlling the cable suddenly jams (stops), determine the maximum tension in the cable and the frequency of vibration of the safe. Neglect the mass of the cable and assume it is elastic such that it stretches 20 mm when subjected to a tension of 4 kN.



Freebody Diagram: Here the stiffness of the cable is $k = \frac{4000}{0.02} = 200(10^3)$ N/m. When the safe is being displaced by an amount y downward vertically from its equilibrium position, the *restoring force* that developed in the cable $T = W + ky = 800(9.81) + 200(10^3)y$.



Equation of Motion:

$$+\uparrow \sum F_x = 0; \quad 800(9.81) + 200(10^3)y - 800(9.81) = -800a \quad [1]$$

Kinematics: Since $a = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$, then substituting this value into Eq. [1], we have

$$200(10^3)y = -800\ddot{y}$$

$$\ddot{y} + 250x = 0 \qquad [2]$$

From Eq. [2], $\omega_n^2 = 250$, thus, $\omega_n = 15.81$ rad/s. Applying Eq. 22-14, we have

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{15.81}{2\pi} = 2.52 \text{ Hz} \quad \textbf{Ans}$$

The solution of the above differential equation (Eq. [2]) is in the form of

$$y = C\sin(15.81t + \phi) \quad [3]$$

Taking the time derivative of Eq. [3], we have

$$\dot{y} = 15.81C\cos(15.81t + \phi) \quad [4]$$

Applying the initial condition of $y = 0$ and $\dot{y} = 6$ m/s at $t = 0$ to Eqs. [3] and [4] yields

$$0 = C\sin\phi \qquad [5]$$

$$6 = 15.81C\cos\phi \quad [6]$$

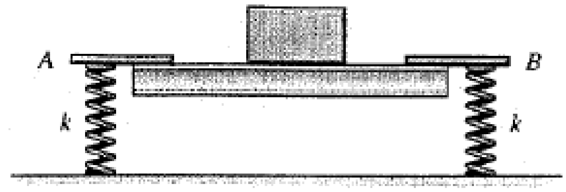
Solving Eqs. [5] and [6] yields

$$\phi = 0^\circ \quad C = 0.3795 \text{ m}$$

Since $y_{max} = C = 0.3795$ m, the maximum cable tension is given by

$$T_{max} = W + ky_{max} = 800(9.81) + 200(10^3)(0.3795) = 83.7 \text{ kN} \quad \textbf{Ans}$$

***22-12.** The uniform beam is supported at its ends by two springs A and B, each having the same stiffness k. When nothing is supported on the beam, it has a period of vertical vibration of 0.83 s. If a 50-kg mass is placed at its center, the period of vertical vibration is 1.52 s. Compute the stiffness of each spring and the mass of the beam.



$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{\tau^2}{(2\pi)^2} = \frac{m}{k}$$

$$\frac{(0.83)^2}{(2\pi)^2} = \frac{m_B}{2k} \qquad (1)$$

$$\frac{(1.52)^2}{(2\pi)^2} = \frac{m_B + 50}{2k} \qquad (2)$$

Eqs. (1) and (2) become

$$m_B = 0.03490k$$

$$m_B + 50 = 0.1170k$$

$$m_B = 21.2 \text{ kg} \qquad \textbf{Ans}$$

$$k = 609 \text{ N/m} \qquad \textbf{Ans}$$